NECTO

An abstract game for 2 players by Kashio Fujii

＃コンポーネント

- 正方形のタイル８種類（曲線２種・交差２種・ねじれ４種）。どのタイルにも各辺の中央に線の端が１つずつあり、２本の線がそれらを２つずつつないでいます。交差のタイルには交差が１つ、ねじれのタイルには２つあります。
- 一辺が６マスの正方形の盤（4×4・8×8 でも遊べます）。盤の周りには枠があり、外周に出ている線の端を、隣どうし２つずつつないでいます。



８種類のタイル。左から曲線 c1・c2、交差 x1（縦の線が上）・x2（横の線が上）、ねじれ t1・t2・t3・t4。記号はデモの棋譜で使う名前です。

＃定義

輪　タイルと枠を通ってひとまわりし、元に戻ってくる１本の線のことです。盤が埋まると、すべての線が輪になります。

結び目　交差の上下を保ったまま、どう動かしても交差のない円にほどけない輪のことです。

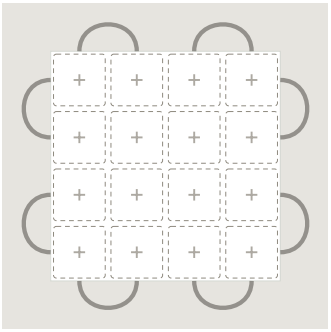
名前の付く結び目と点数　交差が７つ以下で描ける結び目と、三葉結び目２つ（グラニー結び・本結び）、三葉結び目と８の字結び目の組み合わせです。点数は、その結び目を描くのに最低限必要な交差の数です（三葉結び目は３点、８の字結び目は４点、交差５の結び目は５点…交差７の結び目は７点、三葉結び目２つは６点、三葉結び目と８の字結び目は７点）。それより複雑な結び目は名前が付かず、得点になりません。

判定　結び目かどうかと結び目の型は、コンピューターが判定します（アレクサンダー多項式による判定です。交差のとても多い輪では、まれに型を取り違えることがあります）。

輪の交差　輪が自分自身と交わっている交差のことです（別の輪との交差は数えません）。その交差があるタイルを置いた（置き直した）プレイヤーの交差として数えます。

＃準備

- 盤面には何も置かず、空の状態で開始します。
- 先手番と後手番を決めます。



4×4 の盤と枠。枠は外周に出ている線の端を、隣どうし２つずつつないでいます。

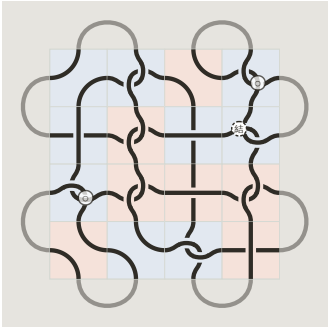
＃終了条件

- 盤が埋まった後、手番のプレイヤーが置き直せるタイルがない（盤のタイルがすべて曲線になった）時点でゲーム終了となります。
- 合計点の多いプレイヤーの勝利となります。同点の場合は引き分けです。

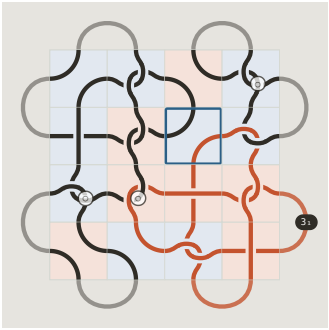
＃手番

ゲームは、盤を埋める**置く段階**と、盤が埋まった後の**置き直しの段階**に分かれます。手番は２つの段階を通して交互に回ります。

1. **置く段階**（盤に空きマスがある間）
   空いている任意のマスを１つ選び、８種類のうち好きなタイルを１枚置きます。この段階では得点は発生しません。
2. **置き直しの段階**（盤が埋まった後）
   - 盤上のタイルを１枚選び、**交差がより少ないタイル**に置き換えます（ねじれ→交差か曲線、交差→曲線。向きは自由です）。置き換えたタイルは、置き直したプレイヤーのものになります。
   - 置き直したマスを通る輪が、**名前の付く結び目に新しくなった**とき（置き直す前から同じ型だった場合は除きます）、その輪の点数が**その輪の交差を多く置いたプレイヤー**に入ります。交差の数が同じ場合は、両方のプレイヤーが得点します。
   - 得点は、その後に輪の形が変わっても消えません。



置き直しの段階の例（4×4）。タイルの地の色はそれを置いたプレイヤーです（先手は青、後手は朱）。点線の札「結」は、名前の付かない複雑な結び目です。



先手が C3 の交差を曲線に置き直すと、輪の一つが三葉結び目（3_1）になりました。その輪の交差は先手２・後手４なので、３点は後手に入ります（輪を朱で示しています）。置き直した人ではなく、交差を多く置いた人が得点します。

＃結び目の数学

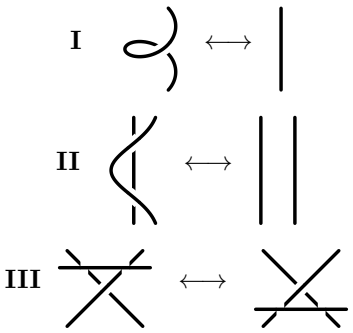
NECTO の点数は、結び目理論という数学の考え方に基づいています。ここでは、ゲームを理解するのに必要なことを説明します。

結び目の図

盤が埋まると、線はすべて輪になります。輪は平面上に描かれた閉じた曲線で、線どうしが交わるところでは、どちらが上を通るかがタイルによって決まっています。数学では、このように上下の情報を付けて平面に描いた輪を、**結び目の図**（ダイアグラム）と呼びます。図では、下を通る線を途切れさせて描きます。

同じ結び目とは

ひもを伸び縮みさせたり動かしたりしても（切ったりつないだりせずに）、結び目そのものは変わりません。しかし図のほうは、動かし方によっていくらでも形が変わります。図の局所的な変形として、次の３つの**ライデマイスター移動**があります。



移動 I：ねじれを１つ作る・消す。移動 II：２本の線を重ねる・はがす（交差が２つ増える・減る）。移動 III：交差の上（または下）を、別の線が通り過ぎる。

２つの図が同じ結び目を表すのは、この３つの移動（と、交差を変えない平面上の変形）を繰り返して、一方から他方に移れるときであり、そのときに限ります（ライデマイスターの定理）。

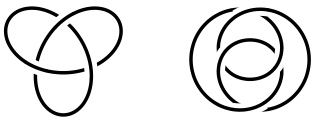
ほどける輪と結び目

交差のない円に変形できる輪を、**自明な結び目**（ほどける輪）といいます。そうでない輪が、ゲームでいう**結び目**です。

交差がたくさんある輪でも、ほどけることはよくあります。例えば、移動 I の左の図のようなねじれは、いくつあっても消せます。実は、交差が２つ以下の図は、どれも必ずほどけます。結び目になるには、自分自身との交差が少なくとも３つ必要です。

交差数

１つの結び目は、交差の数が異なるさまざまな図で描けます。そのうち最も少ない交差の数を、その結び目の**交差数**といいます。NECTO の点数は、この交差数です。



三葉結び目 3_1（交差数３）と８の字結び目 4_1（交差数４）。

盤の上の輪は、交差数よりずっと多くの交差を持っていることがふつうです。点数になるのは図の交差の数ではなく、その輪をどう描き直しても減らせない交差の数です。

結び目の名前

結び目は交差数ごとに番号を付けて呼ばれます。3_1 は「交差数３の１番目」という意味です。交差数７までの結び目（鏡に映したものは同じとみなします）は、次の 14 種類です。

名前	点数	アレクサンダー多項式
3_1	3	t^2-t+1
4_1	4	t^2-3t+1
5_1	5	$t^4-t^3+t^2-t+1$
5_2	5	$2t^2-3t+2$
6_1	6	$2t^2-5t+2$
6_2	6	$t^4-3t^3+3t^2-3t+1$
6_3	6	$t^4-3t^3+5t^2-3t+1$
7_1	7	$t^6-t^5+t^4-t^3+t^2-t+1$
7_2	7	$3t^2-5t+3$
7_3	7	$2t^4-3t^3+3t^2-3t+2$
7_4	7	$4t^2-7t+4$
7_5	7	$2t^4-4t^3+5t^2-4t+2$
7_6	7	$t^4-5t^3+7t^2-5t+1$
7_7	7	$t^4-5t^3+9t^2-5t+1$
$3_1\#3_1$	6	$t^4-2t^3+3t^2-2t+1$
$3_1\#4_1$	7	$t^4-4t^3+5t^2-4t+1$

下の２つは、２つの結び目を１本のひもに続けて結んだもので、**連結和**（記号 $\#$）といいます。三葉結び目２つの連結和には、２つの三葉結び目が同じ向きのグラニー結びと、鏡像どうしの本結びがありますが、NECTO ではどちらも $3_1\#3_1$ として扱います。

コンピューターの判定

結び目かどうかを図から直接見分けるのは、簡単ではありません。そこで NECTO では、図から計算できる**アレクサンダー多項式**を使います。図をライデマイスター移動で変形しても、多項式は変わりません。つまり、多項式が違えば、異なる結び目です。

上の表の多項式はどれも異なるので、多項式で型を見分けられます（多項式は、t の何乗かを掛けることと全体の符号の違いを除いて決まります。表は定数項が正になるように書いています）。ただし逆は成り立たず、異なる結び目が同じ多項式を持つこともあります。例えば、交差数 11 の木下・寺阪の結び目は、ほどける輪と同じ多項式 1 を持ちます。交差のとても多い輪で「まれに型を取り違える」のは、このためです。

なお、アレクサンダー多項式は鏡像を区別しません。NECTO でも、右手系と左手系の三葉結び目は同じ 3_1 です。

置き直しで起こること

交差のタイルを曲線のタイルに置き直すと、その交差がなくなり、線のつながり方が変わります。交差していた２本の線が同じ輪の一部なら、曲線の向きによって、輪が２つに分かれるか、１つのまま残ります。別々の輪の交差だったなら、２つの輪が１つにつながります。こうして、置き直しのたびに輪の形や本数が変わり、結び目の型も変わっていきます。

置き直しのたびに、盤の交差の総数は必ず１つ以上減ります。そのため置き直しの段階は、そのときの交差の総数以下の手数で必ず終わります。終局の盤には交差がないので、すべての輪はほどけた円になります。